

Równania różniczkowe

①

Definicja równania różniczkowego

Równaniem różniczkowym nazywamy równanie wypisujące związek między funkcją i jej pochodnymi.

Dla przykładu, jeśli x jest funkcją zmiennej t , to

$$\ddot{x} + 8\dot{x} + 7x = 0 \text{ jest równaniem różniczkowym.}$$

Uwaga dotycząca notacji:

Pochodną funkcji $x(t)$ będziemy oznaczać $\dot{x}(t)$ lub $\frac{dx}{dt}$.

Jeśli f jest funkcją x , tzn. $y = f(x)$, to równoważnie możemy używać oznaczeń dla pochodnej funkcji f : y' , $\frac{dy}{dx}$, (lub y'' , $\frac{d^2y}{dx^2}$ - dla drugiej pochodnej)

Jeśli funkcja w równaniu różniczkowym jest funkcją jednej zmiennej, to także równanie nazywamy zwyczajnym.

Rząd równania różniczkowego jest rzędem najwyższej pochodnej występującej w równaniu.

np. równanie $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ jest rzędu I (pierwszego)
a równanie $\frac{d^2s}{dt^2} = at$ jest rzędu II (drugiego).

Rozwiązanie równania różniczkowego

Rozwiązać równanie różniczkowe oznacza znaleźć funkcję, która spełnia to równanie.

Dla wielu równań różniczkowych znaleźć takie rozwiązanie może być łatwe.

Łatwiej jest jednak sprawdzić czy konkretna funkcja jest rozwiązaniem równania różniczkowego.

Przykład 1. Sprawdzić rozwiązanie przez podstawienie. (2)

Sprawdzić, czy $y(t) = e^{3t}$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$\dot{y} = 3y \quad (1)$$

Rozwiązanie:

Podstawiamy funkcję $y(t)$ i jej pochodną do równania (1) i otrzymujemy

$$\dot{y}(t) = 3 \cdot e^{3t}$$

$$y(t) = e^{3t}$$

Mamy

$$3e^{3t}$$

$$= 3 \cdot e^{3t}$$

Ponieważ lewa strona równa się prawej, to funkcja $y(t) = e^{3t}$ jest rozwiązaniem równania (1).

Przykład 2. Negatywny wynik sprawdzenia przez podstawienie

Policzyć, że $y(t) = t^3$ nie jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$\dot{y} = \frac{y}{t} \quad (2)$$

(2)

Obliczamy $\dot{y}(t) = 3t^2$ Prawa strona jest zatem równa

$$\frac{y}{t} = \frac{t^3}{t} = t^2$$

Lewa i prawa strona są różne $3t^2 \neq t^2$

Wzyc $y(t) = t^3$ nie jest rozwiązaniem równania (2).

Parametryzacja zbioru rozwiązań równania różniczkowego

Równania różniczkowe zwykle mają więcej niż jedno rozwiązanie. Można zbior wszystkich rozwiązań opisać używając parametrów

Przykład 3 Znaleźć rozwiązanie (wspólne) równania

$$\ddot{x} = 2t$$

To jest standardowy problem rachunku całkowego. ③
Całkując pierwszy raz otrzymamy:

$$\dot{x} = 2 \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 = t^2 + C_1$$

Całkując drugi raz otrzymamy:

$$x(t) = \frac{t^3}{3} + C_1 \cdot t + C_2 \quad (3) \left[\begin{array}{l} \text{Rozwiązanie} \\ \text{ogólne} \end{array} \right]$$

gdzie: C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi.

Równanie (3) daje parametryczny opis zbioru wszystkich rozwiązań równania $\ddot{x} = 2t$.

Stale C_1 i C_2 nazywamy parametrami.

Każdy wybór konkretnych wartości dla C_1 i C_2 daje pojedyncze rozwiązanie (rozwiązanie szczególne)

Dla przykładu: $x(t) = \frac{t^3}{3} + 2t + 1$ i $x(t) = \frac{t^3}{3} + 11t + e$
są różnymi rozwiązaniami równania $\ddot{x} = 2t$.

Problem warunków początkowych

Głównie dane jest równanie różniczkowe i warunki początkowe. W takiej sytuacji mówimy, że mamy do czynienia z problemem z warunkami początkowymi.

Przykład 4 Rozwiązać problem z warunkami początkowymi

$$\ddot{x} = 2t \quad \text{z warunkami } x(1) = 1 \quad \text{i} \quad \dot{x}(1) = 2.$$

Rozwiązanie: W poprzednim przykładzie znaleźliśmy rozwiązanie ogólne tego równania:

$$x(t) = \frac{t^3}{3} + C_1 t + C_2$$

Wprowadzamy warunki początkowe do określenia wartości licbowych stałych C_1 i C_2

$$\dot{x}(t) = t^2 + C_1 \Leftrightarrow \dot{x}(1) = 1 + C_1 = 2 \rightarrow \underline{C_1 = 1}$$

$$x(t) = \frac{t^3}{3} + C_1 t + C_2 \Leftrightarrow x(1) = \frac{1}{3} + C_1 + C_2 = 1 \rightarrow \underline{C_2 = -\frac{1}{3}}$$

Zatem rozwiązanie problemu z warunkami początkowymi (4) ma postać

$$x(t) = \frac{t^3}{3} + t - \frac{1}{3}$$

Najważniejsze równania różniczkowe

Najważniejszym równaniem różniczkowym jest równanie

$$\dot{y} = ay$$

(4)

Słowne równanie to można wyprowadzić następująco.

„Szybkość zmian y jest proporcjonalna do y ”

W literaturze można znaleźć to równanie (4) w innych postaciach: (z wykorzystaniem innych notacji pochodnych)

$$\dot{y} = ay ; \quad \frac{dy}{dt} = ay(t) ; \quad y' = ay ; \quad \dot{y} - ay = 0$$

Wszystkie powyższe równania są tym samym stwierdzeniem między funkcją y a jej pochodną.

Rozwiązaniem równania (4) jest funkcja

$$y(t) = Ce^{at} \quad \text{gdzie } C \text{ jest dowolną stałą.}$$

Żeby to sprawdzić prosto podstawiamy:

$$\text{Lewa strona równania (4): } \dot{y} = aCe^{at}$$

$$\text{Prawa strona równania (4): } ay = a \cdot Ce^{at}$$

Ponieważ obie strony są sobie równe, więc rozwiązaniem $y(t) = Ce^{at}$ jest istotnie rozwiązaniem równania (4).

Ponieważ w równaniu występuje funkcja wykładnicza, równanie (4) nazywane jest równaniem wzrostu wykładniczego (lub spadku wykładniczego). Stała a jest nazywana współczynnikiem wzrostu (lub spadku) wykładniczego.

June podstawowe przykłady

(5)

Podane zostaną podstawowe przykłady zaczerpnięte z matematyki i innych nauk. Z wyjątkiem przykładu 5 nie będą podane rozwiązania.

Przykład 5 (2 zadanie całkowe)

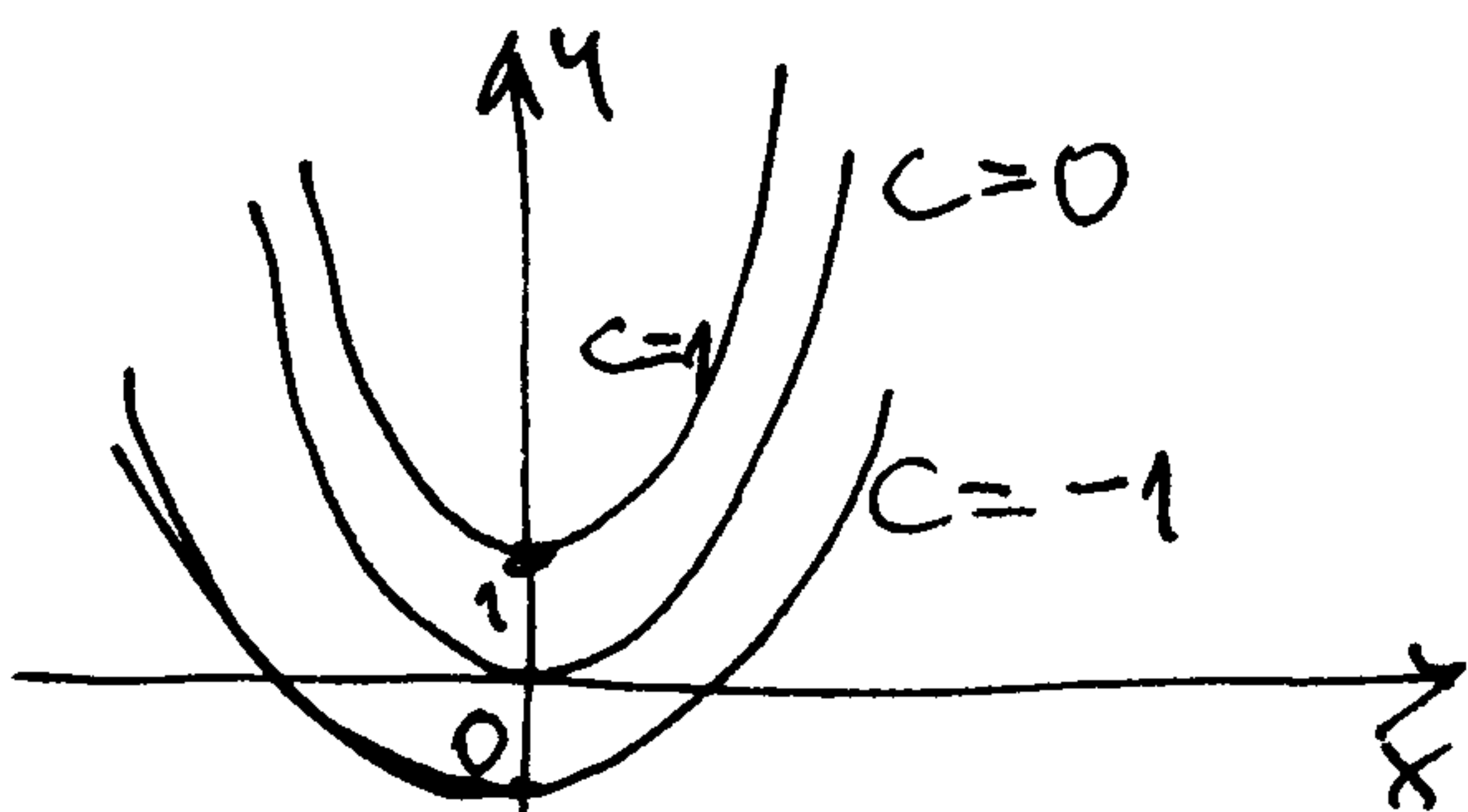
Znaleźć y spełniające równanie $\frac{dy}{dx} = 2x$

Rozwiązanie:

Polega na znalezieniu funkcji pierwotnej dla $2x$

$$y(x) = x^2 + C \quad (\text{rozwiązanie ogólne})$$

Wpływ krytycznych całkowych



Przykład 6 (bez rozwiązania - Stygurskie, Dyfuzja ciepła)

Ciało o temperaturze T jest w otoczeniu o temperaturze T_E

Newtonowskie prawo stygurskie modeluje szybkość

zmiany temperatury:

$$T' = -k(T - T_E)$$

gdzie k jest stałą o wartości dodatniej

[Jeśli $T > T_E$ to prawa strona jest ujemna; czyli pochodna temperatury T względem czasu jest ujemna zatem funkcja $T(t)$ jest malejąca - ciało stygnie]

Prawo Newtona

"Szybkość zmian temperatury jest proporcjonalna do różnicy temperatur $T - T_E$ "

Przykład 7 (Prawo swobodnego spadku w polu grawitacyjnym) 6)
W pobliżu Ziemi (lub w polu grawitacyjnym dowolnego ciała) ciało spada zgodnie z równaniem:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g$$

gdzie: y jest wysokość ciała nad ziemią a g jest współczynnikiem zwany ~~stałą przyspieszenia~~ ^{przyspieszeniem ziemskim} ($g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$)

Przykład 8 (Prawo grawitacji Newtona)

Prawo grawitacji Newtona stwierdza, że przyspieszenie ciała spowodowane grawitacją w odległości r od środka Ziemi jest równe

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -GM_E / r^2$$

gdzie: M_E jest masa ziemi

G jest stałą grawitacji ($G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$)